Cuadernos de COU y
Selectividad

FISICA

1

Cálculos con vectores

J. J. LOZANO LUCEA y J. L. VIGATÁ CAMPO

Alhambra Longman

Cuadernos de COU y
Selectividad

J. J. Lozano Lucea
J. L. Vigatá Campo

1

Cálculos con vectores

FÍSICA

Alhambra Longman

Producción editorial:
Dirección: José Luis Ferrer
Coordinación: Óscar García
Diseño: Gentil Andrade

ISBN 84-205-2122-1

Depósito legal: M. 20.873-1992

Impreso en España - Printed in Spain

Gráficas Rógar, S. A. - León, 44. Pol. Ind. Cobo Calleja - Fuenlabrada (Madrid)

Contenido

Presentación

Con estos cuadernos pretendemos suministrar a los alumnos de C.O.U. un instrumento del que puedan servirse para reforzar su formación en cuanto a la asignatura de Física en este curso y, a la vez, orientar de un modo más específico su preparación de las Pruebas de Acceso a la Universidad (Selectividad) en lo que a esta materia se refiere.

Todos los cuadernos están estructurados del mismo modo:

- **Recordatorio teórico.** Con este Recordatorio se revisa el tema en cuestión, haciendo hincapié en los aspectos fundamentales. En lo posible, se ha tratado de no insistir ni en las deducciones ni en el cálculo matemático, que los lectores podrán revisar en sus propios libros de texto.

- **Cuestiones de autoevaluación.** Hemos introducido estas cuestiones como elemento de autoevaluación (incluyen al final las respuestas correctas). Con su ayuda, el usuario podrá valorar si la preparación teórica necesaria, asentada con ayuda del Recordatorio, ha llegado al grado de asimilación y madurez precisos para emprender la etapa siguiente.

- **Ejercicios resueltos.** Se pretende, a su través, el dotar a los alumnos de las estrategias de resolución de problemas que les permitan aplicar correctamente sus conocimientos teóricos a las situaciones que se les planteen, y adquirir hábitos tales como el explicar lo que se hace, utilizar de modo adecuado las unidades, etcétera.

- **Ejercicios propuestos.** Con estos ejercicios, todos ellos acompañados de la solución numérica correspondiente, se pretende dos objetivos: el que los alumnos continúen su preparación práctica y que puedan evaluar la mejoría adquirida por asimilación de las técnicas empleadas en los ejercicios resueltos.

La mayor parte de los ejercicios, tanto resueltos como propuestos, han sido propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en distintos distritos universitarios; el resto los hemos añadido intentando conseguir una formación equilibrada en cada uno de los temas.

J. J. Lozano Lucea
J. L. Vigatá Campo

Recordatorio

Magnitudes escalares

Llamamos *magnitudes escalares* a aquellas en las que las medidas quedan correctamente expresadas por medio de un número y la correspondiente unidad.

Magnitudes vectoriales

Llamamos *magnitudes vectoriales* a aquellas en las que las medidas, para quedar correctamente expresadas, precisan, además de un número y la correspondiente unidad, de la indicación de la dirección y el sentido en que actúan (en algunos casos, vectores fijos, precisan además la indicación del punto de aplicación).

A las magnitudes vectoriales las representamos por medio de vectores. Un *vector* es un segmento de recta orientado, en el que la recta sobre la que se encuentra (recta de acción) nos da la dirección, y su longitud es proporcional al módulo (según la escala escogida); el sentido viene indicado por una punta de flecha que coincide con el extremo del vector, y el origen del vector coincide con el punto de aplicación (cuando existe).

Relaciones entre vectores: Tipos de vectores

Decimos que dos vectores son *equipolentes* cuando tienen iguales el módulo, la dirección y el sentido.

Cuando dos vectores tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos contrarios, se dice de ellos que son vectores *opuestos*.

Si para que dos vectores sean iguales basta que sean equipolentes, decimos de ellos que son vectores *libres*.

Si para que dos vectores sean iguales, además de ser equipolentes, han de tener la misma línea de acción, decimos de ellos que son vectores *deslizantes*.

Si para que dos vectores sean iguales, además de ser equipolentes, han de tener el mismo punto de aplicación, decimos de ellos que son vectores *fijos*.

Existen vectores que están ligados a un sentido de giro; para que queden completamente definidos es preciso asociarlos a una regla que permita establecer la relación entre el sentido del vector y el sentido de giro (regla de Maxwell, regla de la mano izquierda, etcétera.). Se les llama vectores *axiales* en contraposición al resto de los vectores, a los que se denomina vectores *polares*.

Composición y descomposición de vectores

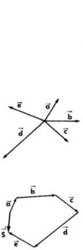

Fig. 1

Llamamos *composición de un sistema de vectores* a un proceso que consiste en la obtención de un vector cuyo efecto fuese igual al efecto conjunto del sistema de vectores. Gráficamente, podemos componer un conjunto de vectores no paralelos aplicando el método del polígono vectorial, que consiste en dibujar los distintos vectores de modo que, situado uno de ellos, tracemos a partir de su extremo un vector equipolente al segundo, por el extremo de éste, un vector equipolente al tercero, y, así, sucesivamente hasta haber situado todos. El vector resultante de la composición (vector suma) sería aquel cuyo origen es el origen del primer vector y cuyo extremo es el extremo del último (fig. 1).

Llamamos *descomposición de un vector* al proceso de obtención de un sistema de vectores cuyo efecto conjunto fuese igual al del vector que queremos descomponer. Esto puede llevarse a cabo de infinitas maneras diferentes, pero de ordinario se nos prefijan dos direcciones dadas en el plano (o tres en el espacio), con lo que la solución es única. Para descomponer gráficamente un vector $\vec{c}$ en dos direcciones concurrentes dadas, X e Y, en el plano, se procede situando $\vec{c}$ en el punto de concurrencia de X e Y, y trazando por el extremo del vector $\vec{c}$ sendas paralelas a las direcciones X e Y; los puntos de corte de las mencionadas paralelas con las direcciones señaladas nos indican los extremos de los

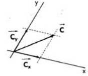

Fig. 2

vectores componentes $\vec{c}_x$ y $\vec{c}_y$, cuyos orígenes serán comunes con los del vector $\vec{c}$ (fig. 2).

Producto de un vector por un escalar

El producto de un vector $\vec{a}$ por un escalar n es un vector cuya dirección es la del vector factor; su sentido, el del vector factor, si el escalar es positivo, o el opuesto, si el escalar es negativo, y su módulo se identifica con el valor del producto del módulo del vector factor por el escalar.

Sistemas de coordenadas vectoriales

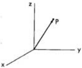

Fig. 3

Para poder establecer relaciones entre puntos del espacio y vectores, es necesaria la elección de un sistema de coordenadas vectoriales. De ordinario, trabajaremos con un sistema constituido por tres ejes ortogonales con un punto común (sistema cartesiano). Con estos sistemas, cada punto del espacio viene caracterizado por un único vector cuyo origen se encuentra en el origen de coordenadas, y su extremo en el punto en cuestión (fig. 3); conocemos este vector como *vector de posición del punto*.

Vector unitario

Definimos como *vector unitario* $\vec{u}_a$ en la dirección y sentido de un vector $\vec{a}$, a otro vector que, teniendo la dirección y el sentido indicados, tiene un módulo unidad. Podemos establecer la relación entre el vector $\vec{a}$ y el vector $\vec{u}_a$ a partir de la idea del producto de un vector por un escalar, de modo que tendremos

$$\vec{a} = |\vec{a}|\ \vec{u}_a$$

y por tanto,

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

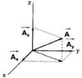

Fig. 4

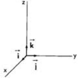

Fig. 5

Las componentes cartesianas de un vector y sus vectores unitarios

A los vectores unitarios según los ejes coordenados cartesianos OX, OY y OZ, se les representa respectivamente por $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

Cuando tenemos un vector $\vec{A}$ descompuesto en sus componentes cartesianas (fig. 4), en virtud del concepto de componentes podemos poner

$$\vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y} + \overrightarrow{A_z}$$

Si tenemos en cuenta los vectores unitarios según los ejes coordenados cartesianos que aparecen en la figura 5, y establecemos las relaciones entre los mismos y las componentes cartesianas del vector $\vec{A}$

$$\overrightarrow{A_x} = A_x \, \vec{i}$$

$$\overrightarrow{A_y} = A_y \, \vec{j}$$

$$\overrightarrow{A_z} = A_z \, \vec{k}$$

en donde

$$A_x = |\overrightarrow{A_x}|$$

$$A_y = |\overrightarrow{A_y}|$$

$$A_z = |\overrightarrow{A_z}|$$

podremos poner

$$\vec{A} = A_x \, \vec{i} + A_y \, \vec{j} + A_z \, \vec{k}$$

Esta forma de expresión de un vector, en función de los vectores unitarios tomados sobre los ejes cartesianos, nos permite trabajar con mucha comodidad las distintas operaciones en que intervienen vectores, como podemos ver en los siguientes ejemplos:

Expresión analítica para la suma de vectores

Dados los vectores

$$\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\,\vec{i} + B_y\,\vec{j} + B_z\,\vec{k}$$

$$\vec{C} = C_x\,\vec{i} + C_y\,\vec{j} + C_z\,\vec{k}$$

la expresión correspondiente al vector suma

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

es

$$\vec{S} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k} + B_x\,\vec{i} + B_y\,\vec{j} + B_z\,\vec{k} + \\ + C_x\,\vec{i} + C_y\,\vec{j} + C_z\,\vec{k}$$

o bien

$$\vec{S} = (A_x + B_x + C_x)\,\vec{i} + (A_y + B_y + C_y)\,\vec{j} + (A_z + B_z + C_z)\,\vec{k}$$

siendo, por tanto,

$$S_x = A_x + B_x + C_x$$

$$S_y = A_y + B_y + C_y$$

$$S_z = A_z + B_z + C_z$$

Expresión analítica para la diferencia de vectores

Dados los vectores

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

la expresión correspondiente al vector diferencia

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

es

$$\vec{D} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) - (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

o lo que es lo mismo

$$\vec{D} = (A_x - B_x)\,\vec{i} + (A_y - B_y)\,\vec{j} + (A_z - B_z)\,\vec{k}$$

Expresión analítica para el producto de un vector por un escalar

Dado el vector

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

y el escalar n, la expresión correspondiente al producto será

$$n \cdot \vec{A} = n \cdot (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k})$$

o lo que es lo mismo

$$n \cdot \vec{A} = n \cdot A_x\vec{i} + n \cdot A_y\vec{j} + n \cdot A_z\vec{k}$$

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores es un número que se identifica con el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman (fig. 6):

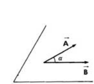

Fig. 6

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\alpha$$

Como consecuencia de la definición antedicha, los productos escalares entre los vectores unitarios tomados según los ejes coordenados cartesianos son

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1 \qquad \vec{j}\cdot\vec{i} = 0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \qquad \vec{j}\cdot\vec{j} = 1 \qquad \vec{k}\cdot\vec{j} = 0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{k} = 0 \qquad \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 \qquad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

Expresión analítica del producto escalar de dos vectores

Dados los vectores

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, llegamos fácilmente a

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

. Ángulo de dos vectores

La expresión a la que acabamos de referirnos, junto con la correspondiente a la de definición de producto escalar de dos vectores, nos permiten deducir el ángulo que forman dos vectores dados a partir de sus expresiones analíticas.

$$|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \alpha = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

de donde

$$\cos \alpha = \frac{A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$$

$$\alpha = \text{arc cos} \frac{A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$$

Módulo de un vector

El módulo de un vector

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

puede obtenerse fácilmente a través de la expresión

$$|\vec{A}| = \sqrt{|\vec{A_x}|^2 + |\vec{A_y}|^2 + |\vec{A_z}|^2}$$

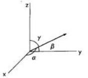

Fig. 7

Cosenos directores

La dirección de un vector forma con los ejes coordenados sendos ángulos α, β, γ (fig. 7). Los cosenos de dichos ángulos, a los que se denomina *cosenos directores del vector*, gozan de la siguiente propiedad:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Producto vectorial de dos vectores

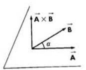

Fig. 8

El producto vectorial de dos vectores, $\vec{A} \cdot \vec{B}$, es otro vector, cuya dirección es perpendicular al plano que determinan los vectores factores; su sentido, el de avance de un sacacorchos para diestros que gire del primero al segundo vector por el camino más corto, y cuyo módulo se identifica con la expresión

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \text{ sen } \alpha$$

siendo α el ángulo que forman los vectores factores (fig. 8).

Puede deducirse, de la propia definición, que el producto vectorial no es conmutativo, los productos $\vec{A} \times \vec{B}$ y $\vec{B} \times \vec{A}$ resultan ser vectores opuestos.

Como consecuencia de la definición, los productos vectoriales entre los vectores unitarios según los ejes coordenados son (fig. 9):

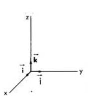

Fig. 9

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0 \qquad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{j} = 0 \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Expresión analítica del producto vectorial de dos vectores

Dados los vectores

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, llegamos a

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\vec{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\vec{j} + \\ + (A_xB_y - A_yB_x)\,\vec{k}$$

Esta expresión también puede obtenerse desarrollando el siguiente determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

La expresión

$$|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \text{ sen } \alpha$$

junto con la deducción, a partir de la expresión analítica, del valor de $\vec{A} \times \vec{B}$ nos permite (como ocurría con el producto escalar) calcular el ángulo que forman los dos vectores:

$$\alpha = \text{arc sen } \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|}$$

Representación vectorial de superficies

El valor del módulo del producto vectorial de dos vectores

$$|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \text{ sen } \alpha$$

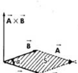

Fig. 10

coincide con el valor del área del paralelogramo que determinan los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y sendos vectores equipolentes a los primeros, situados sobre los extremos de los recíprocos (fig. 10), de modo que

$$S = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \text{ sen } \alpha$$

Cualquier superficie orientable puede ser considerada como constituida por un número suficientemente grande de paralelogramos elementales, de área dS, a cada uno de los cuales se puede asociar un vector $\vec{dS}$ perpendicular a la superficie; en muchas ocasiones nos interesará asociar las superficies con vectores-superficie, cuyo módulo coincidirá con el área de la superficie en cuestión (el sentido vendrá dado en función de un criterio de polaridad previamente convenido).

Momento de un vector con respecto a un punto

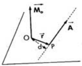

Fig. 11

El momento de un vector deslizante, $\vec{A}$, con respecto a un punto O es otro vector, perpendicular al plano que determinan el vector y el punto, cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos para diestros que girase como lo haría el vector alrededor del punto, y cuyo módulo se identifica con el producto del módulo del vector por la mínima distancia, *d*, entre el vector y el punto (O). Con esta definición vemos que podemos identificar el momento, $\vec{M}_o$, de un vector $\vec{A}$ con respecto a un punto O con el producto vectorial

$$\vec{r} \times \vec{A} = \vec{M}_o$$

de modo que

$$|\vec{M}_o| = d \cdot |\vec{A}|$$

es decir, que el valor del momento de $\vec{A}$ con respecto a O es independiente de la posición del vector $\vec{A}$ sobre su propia recta de acción.

El vector $\vec{M}_o$ es un vector libre.

Teorema de Varignon

Cuando tenemos un sistema de vectores deslizantes cuyas direcciones concurren en un punto *P*, la suma de los momentos de los distintos vectores con respecto a un punto O es igual al momento, con respecto al mismo punto, de la resultante del sistema de vectores. De modo que si

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{R}$$

$$\vec{M}_{oA} + \vec{M}_{oB} + \vec{M}_{oC} + \dots = \vec{M}_{oR}$$

es decir,

$$\Sigma\, \vec{M}_{oi} = \vec{M}_{oR}$$

Momento de un vector con respecto a un eje

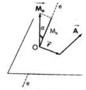

Fig. 12

Se define el momento, M_e, de un vector $\vec{A}$ con respecto a un eje como la proyección sobre dicho eje del momento, $\vec{M}_o$, del vector $\vec{A}$ con respecto a cualquier punto del eje. En consecuencia, esta magnitud tiene carácter escalar.

$$M_e = |\vec{M}_o| \cos \alpha$$

Si $\vec{u}$ es el vector unitario en la dirección del eje

$$M_e = \vec{u} \cdot \vec{M}_o$$

Momento de un par de vectores

Un *par de vectores* es un sistema constituido por dos vectores iguales, paralelos y de sentidos contrarios. La resultante de este sistema es el vector nulo.

Un par de vectores viene caracterizado por su momento. El momento de un par de vectores es otro vector, perpendicular al plano que determinan los dos vectores, cuyo sentido es el de avance de un sacacorchos para diestros que gire como lo haría el par y cuyo módulo se identifica como el producto entre el módulo de uno cualquiera de los vectores y la mínima distancia entre los mismos (a la que se denomina *brazo del par*).

Derivación vectorial

Si una magnitud vectorial $\vec{A}$ es función de un escalar t, admite la función derivada, de manera que siendo

$$\begin{aligned}\vec{A}(t) &= \vec{A_x}(t) + \vec{A_y}(t) + \vec{A_z}(t) = \\ &= A_x(t)\,\vec{i} + A_y(t)\,\vec{j} + A_z(t)\,\vec{k}\end{aligned}$$

podemos poner

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

Las reglas de derivación correspondientes a las principales funciones vectoriales, que aparecen como consecuencia de las operaciones entre vectores que venimos describiendo, son las siguientes:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} - \frac{d\vec{C}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B}\times\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(n\cdot\vec{A}) = n\cdot\frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{A}\cdot\frac{dn}{dt}$$

Si la función vectorial $\vec{A}$ es función de dos o más escalares, por ejemplo, *x, y, z...*, las derivadas de la misma serán derivadas parciales; así,

$$\frac{\delta\vec{A}}{\delta x};\ \frac{\delta\vec{A}}{\delta y};\ \frac{\delta\vec{A}}{\delta z}$$

de modo que

$$\frac{\delta\vec{A}}{\delta x} = \frac{\delta A_x}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta A_y}{\delta x}\vec{j} + \frac{\delta A_y}{\delta x}\vec{k}$$

$$\frac{\delta\vec{A}}{\delta y} = \frac{\delta A_x}{\delta y}\vec{i} + \frac{\delta A_y}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta A_y}{\delta y}\vec{k} \text{ etc.}$$

y las derivadas de orden superior al primero serán como las siguientes:

$$\frac{\delta^2\vec{A}}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta\vec{A}}{\delta x}\right)$$

$$\frac{\delta^2\vec{A}}{\delta x\delta y} = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta\vec{A}}{\delta y}\right)$$

Gradiente, divergencia, rotacional

Se llama *operador nabla*, $\overrightarrow{\ }$, al operador vectorial de derivación.

$$\overrightarrow{\ } = \frac{\delta}{\delta x}\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\delta}{\delta y}\,\vec{\mathbf{j}} + \frac{\delta}{\delta z}\,\vec{\mathbf{k}}$$

Cuando se aplica el operador nabla a una función escalar V, el resultado de la operación es un vector al que denominamos *gradiente del escalar*.

$$\overrightarrow{\mathbf{Grad\ V}} = \overrightarrow{\ }\, V = \frac{\delta V}{\delta x}\,\vec{\mathbf{i}} + \frac{\delta V}{\delta y}\,\vec{\mathbf{j}} + \frac{\delta V}{\delta z}\,\vec{\mathbf{k}}$$

Cuando se aplica escalarmente el operador nabla a una función vectorial $\vec{\mathbf{A}}$, el resultado de la operación es un escalar al que denominamos *divergencia del vector*.

$$\overrightarrow{\ } \cdot \vec{\mathbf{A}} = \frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{\delta A_y}{\delta y} + \frac{\delta A_z}{\delta z}$$

Llamamos *rotacional de un vector* $\vec{\mathbf{A}}$ al producto vectorial del vector nabla por el vector $\vec{\mathbf{A}}$.

$$\overrightarrow{\ } \times \vec{\mathbf{A}} = \left(\frac{\delta A_z}{\delta y} - \frac{\delta A_y}{\delta z}\right)\vec{\mathbf{i}} + \left(\frac{\delta A_x}{\delta z} - \frac{\delta A_z}{\delta x}\right)\vec{\mathbf{j}} +$$

$$+ \left(\frac{\delta A_y}{\delta x} - \frac{\delta A_x}{\delta y}\right)\vec{\mathbf{k}}$$

Integración vectorial

Si un vector $\vec{\mathbf{A}}$ es función de un escalar t, y sus componentes son funciones integrables, se define la integral indefinida de $\vec{\mathbf{A}}(t)$ como

$$\int \vec{\mathbf{A}}(t)\, dt = \vec{\mathbf{i}} \int A_x(t)\, dt + \vec{\mathbf{j}} \int A_y(t)\, dt + \vec{\mathbf{k}} \int A_z(t)\, dt$$

de manera que, en general,

$$\int \vec{\mathbf{A}}(t)\, dt = \vec{\mathbf{B}}(t) + \vec{\mathbf{C}}$$

en donde $\vec{\mathbf{C}}$ es un vector arbitrario y constante (que no depende de t).

La integral definida de la misma función vectorial $\vec{\mathbf{A}}(t)$ entre los límites a y b será

$$\int_a^b \vec{\mathbf{A}}(t)\, dt = \vec{\mathbf{i}}\int_a^b A_x\, dt + \vec{\mathbf{j}}\int_a^b A_y\, dt + \vec{\mathbf{k}}\int_a^b A_z\, dt$$

de manera que, en general,

$$\int_a^b \vec{\mathbf{A}}(t)\, dt = \left[\vec{\mathbf{B}}(t)\right]_a^b = \vec{\mathbf{B}}(t)_b - \vec{\mathbf{B}}(t)_a$$

Cuestiones

1. El momento de un vector con respecto a un punto tiene como módulo el producto del módulo del vector por la distancia entre el origen del vector y el punto. V F
2. Si tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ son coplanarios, el producto $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ es nulo. V F
3. Dos vectores de módulo dado presentan un valor máximo para su producto escalar cuando son paralelos. V F
4. Cuando dos vectores son opuestos, su producto vectorial es nulo. V F
5. La temperatura es una magnitud vectorial. V F
6. La presión es una magnitud escalar. V F
7. El producto escalar de dos vectores es conmutativo. V F
8. El producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección ortogonal del otro sobre él. V F
9. La suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector es siempre igual a 1. V F
10. Cuando multiplicamos un vector por un número, su módulo queda multiplicado por ese número. V F
11. Si un punto se traslada paralelamente a un vector, el momento del vector con respecto a dicho punto no cambia. V F
12. El momento de un vector con respecto a un eje coplanario al vector es siempre nulo. V F
13. El momento de un vector con respecto a un eje paralelo al vector es siempre nulo. V F
14. Para dos vectores dados, el módulo de su suma es siempre mayor que el módulo de su diferencia. V F

15. Para hallar las componentes cartesianas de un vector no es suficiente conocer las coordenadas cartesianas de su origen y de su extremo. [V] [F]

16. Si dos vectores son perpendiculares, el módulo de su suma vale lo mismo que el módulo de su diferencia. [V] [F]

17. Las componentes cartesianas de un vector son independientes del punto en que se encuentra aplicado. [V] [F]

18. La derivada del módulo de un vector vale lo mismo que el módulo de la derivada de dicho vector. [V] [F]

19. El producto escalar de dos vectores cuyos módulos son respectivamente 6 y 5 puede valer 15. [V] [F]

20. La derivada de un vector de módulo constante es siempre nula. [V] [F]

21. El momento de un conjunto de vectores con respecto a un punto situado sobre la recta de aplicación del vector suma es siempre nulo. [V] [F]

Soluciones a las cuestiones propuestas

1	F	8	V	15	F
2	V	9	V	16	V
3	V	10	V	17	V
4	V	11	V	18	F
5	F	12	V	19	V
6	V	13	V	20	F
7	V	14	F	21	V

Ejercicios resueltos

1. Deducir a través del producto escalar de dos vectores la expresión que liga el módulo de un vector con los valores de las componentes del mismo.

Resolución

Dado el vector

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

si efectuamos el producto escalar del vector por sí mismo, tendremos

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos 0° = |\vec{A}|^2$$

Como, por otra parte,

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x \cdot A_x + A_y \cdot A_y + A_z \cdot A_z = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

llegamos a

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

2. Deducir que la suma de los cuadrados de los cosenos directores de un vector vale 1.

Resolución

Si consideramos la relación entre los ángulos α, β y γ, el vector y sus componentes cartesianas (fig. 13), tendremos

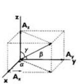

Fig. 13

$$|\vec{A_x}| = |\vec{A}| \cdot \cos \alpha$$

$$|\vec{A_y}| = |\vec{A}| \cdot \cos \beta$$

$$|\vec{A_z}| = |\vec{A}| \cdot \cos \gamma$$

Si elevamos estas expresiones al cuadrado y las sumamos, tendremos

$$|\vec{A_x}|^2 + |\vec{A_y}|^2 + |\vec{A_z}|^2 = |\vec{A}|^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$

Pero hemos visto que

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Si elevamos esta expresión al cuadrado y comparamos con la anterior, llegamos a

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

3. Calcular la resultante del sistema formado por los vectores

$$\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{C} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

Resolución

Los módulos de las componentes del vector resultante serán, respectivamente

$$S_x = 3 + 1 + 2 = 6$$

$$S_y = -2 + 1 + 2 = 1$$

$$S_z = 3 - 2 - 1 = 0$$

por tanto, como

$$\vec{S} = S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k}$$

tendremos

$$\vec{S} = 6\vec{i} + \vec{j}$$

4. Dado el vector

$$\vec{A} = 2\vec{i} + 6\vec{j} - 4\vec{k}$$

determinar el vector $\frac{3}{2}\vec{A}$

Resolución

Como vemos, se trata del producto de un vector por un escalar, y los módulos de las componentes cartesianas del vector producto serán, respectivamente,

$$P_x = \frac{3}{2} A_x = 3$$

$$P_y = \frac{3}{2} A_y = 9$$

$$P_z = \frac{3}{2} A_z = -6$$

por consiguiente,

$$\vec{P} = \frac{3}{2}\vec{A} = 3\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k}$$

5. Un cuerpo se mueve según un plano vertical, de modo que en un momento dado su velocidad es de 50 m/s y forma (en sentido ascendente) un ángulo de 60° con la horizontal. Determinar las componentes cartesianas de la velocidad en ese instante y expresar el correspondiente vector velocidad en función de sus componentes.

Resolución

El módulo de la componente horizontal será

$$|\vec{v_x}| = |\vec{v}| \cos 60° = 50 \text{ m/s} \cdot 0{,}5 = \mathbf{25\ m/s}$$

y el de la componente vertical

$$|\vec{v_y}| = |\vec{v}| \text{ sen } 60° = 50 \text{ m/s } \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{43{,}3\ m/s}$$

Por tanto, el vector velocidad será

$$\vec{v} = 25\vec{i} + 43{,}3\vec{j} \qquad \text{(SI)}$$

6. Dados los vectores

$$\vec{A} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

determinar el valor de su producto escalar.

Resolución

Haciendo uso de la correspondiente expresión analítica

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z =$$

$$= 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 2 = -4$$

7. Determinar el ángulo que forma el vector

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

con el eje OX, y el módulo de su proyección sobre dicho eje.

Resolución

El ángulo que forma el vector $\vec{A}$ con el eje OX será el mismo que el que dicho vector forme con el vector $\vec{i}$.

De una parte

$$\vec{A} \cdot \vec{i} = |\vec{A}|\ |\vec{i}| \cos \alpha$$

siendo

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{9+9+1} = \sqrt{19}$$

$$|\vec{i}| = 1$$

por tanto,

$$\vec{A} \cdot \vec{i} = \sqrt{19} \cos \alpha$$

y como

$$\vec{A} \cdot \vec{i} = A_x \cdot 1 + A_y \cdot 0 + A_z \cdot 0 = A_x = 3$$

podemos deducir que

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{19}}$$

y en consecuencia,

$$\alpha = \text{arc cos} \frac{3}{\sqrt{19}} = 46°30'$$

La proyección del vector $\vec{A}$ sobre el eje OX será

$$\text{Proy } \overrightarrow{A_{ox}} = |\vec{A}| \cdot \cos \alpha = \sqrt{19} \cdot \cos 46°30' = 3$$

conclusión a la que podíamos haber llegado con sólo observar la expresión analítica del vector, ya que

$$\overrightarrow{A_x} = 3\,\vec{i} \Rightarrow |\overrightarrow{A_x}| = 3$$

8. Dados los vectores

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

determinar el vector unitario en la dirección y sentido del vector $\vec{C} = 2\vec{A} - \vec{B}$

Resolución

En primer lugar determinaremos la expresión correspondiente al vector $2\vec{A} - \vec{B}$:

$$2\vec{A} - \vec{B} = (2A_x - B_x)\,\vec{i} + (2A_y - B_y)\,\vec{j} + (2A_z - B_z)\,\vec{k} =$$

$$= 5\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k} = \vec{C}$$

y en virtud de la definición de vector unitario

$$\vec{u_C} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{5\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{78}}$$

es decir,

$$\vec{u_C} = \frac{5}{\sqrt{78}}\,\vec{i} + \frac{7}{\sqrt{78}}\,\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{78}}\,\vec{k}$$

9. Si un vector forma con la región positiva del eje OX un ángulo de 30°, y con la región positiva del eje OY un ángulo de 80°, determinar el ángulo que formará dicho vector con la región positiva del eje OZ.

Resolución

A partir de la propiedad de los cosenos directores de un vector

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

podemos poner

$$\cos^2 30° + \cos^2 80° + \cos^2 \gamma = 1$$

de donde

$$\cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 30° - \cos^2 80° = 0{,}22$$

por tanto,

$$\cos \gamma = \pm 0{,}469$$

$$\gamma = \text{arc cos } 0{,}469 = \mathbf{62°1'}$$

o bien

$$\gamma = \text{arc cos } (-0{,}469) = \mathbf{117°59'}$$

10. El vector $\vec{A} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, se encuentra aplicado en el punto (1,1,2). Determinar el momento del vector $\vec{A}$ con respecto al origen de coordenadas.

Resolución

Como el momento de un vector $\vec{A}$ con respecto a un punto O es

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{A}$$

y en este caso

$$\vec{r} = (1 - 0)\,\vec{i} + (1 - 0)\,\vec{j} + (2 - 0)\,\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

podemos poner

$$\vec{M}_o = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

de donde

$$\vec{M}_o = -8\vec{i} + 8\vec{j}$$

11. Dados los vectores

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{C} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

determinar el módulo del vector $\vec{P} = \vec{C} \times (\vec{A} - \vec{B})$.

Resolución

. Calculemos en primer lugar

$$\vec{A} - \vec{B} = (3 - 2)\,\vec{i} + (0 + 1)\,\vec{j} + (2 + 1)\,\vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

y efectuemos

$$\vec{C} \times (\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Por tanto,

$$\vec{P} = 4\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$$

y el módulo solicitado será

$$|\vec{P}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{66}$$

12. Resolver la integral

$$\int [(3t^2 + 1)\,\vec{i} - 7t\,\vec{j} + 4t^3\,\vec{k}]\,dt$$

Resolución

$$\int [(3t^2 + 1)\vec{i} - 7t\vec{j} + 4t^3\vec{k}]\,dt =$$

$$\int (3t^2 + 1)\vec{i}\,dt - \int 7t\vec{j}\,dt + \int 4t^3\vec{k}\,dt =$$

$$= (t^3 + t)\vec{i} - \frac{7}{2}t^2\vec{j} + t^4\vec{k} + \vec{C}$$

es donde $\vec{C}$ es un vector constante y arbitrario.

13. Resolver la integral

$$\int_2^3 (4\vec{i} - 2t\vec{j} + 2t^3\vec{k})\,dt$$

Resolución

$$\int_2^3 (4\vec{i} - 2t\vec{j} + 2t^3\vec{k})\,dt = \int_2^3 4\vec{i}\,dt - \int_2^3 2t\vec{j}\,dt + \int_2^3 2t^3\vec{k}\,dt =$$

$$= \left[4t\vec{i}\right]_2^3 - \left[t^2\vec{j}\right]_2^3 + \left[\frac{1}{2}t^4\vec{k}\right]_2^3 = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \frac{65}{2}\vec{k}$$

14. Dado el vector $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, aplicado en el punto (3,2,1), encontrar su momento con respecto al eje OZ.

Resolución

Tomemos un punto cualquiera del eje OZ, por ejemplo el punto (0,0,2). El momento del vector $\vec{A}$ con respecto al punto (0,0,2) será

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{A}$$

y como

$$\vec{r} = (3 - 0)\,\vec{i} + (2 - 0)\,\vec{j} + (1 - 2)\,\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

tendremos

$$\vec{M_o} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\vec{i} - 12\vec{j} - 12\vec{k}$$

Por tanto, siendo

$$M_e = \vec{u_e} \cdot \vec{M_o}$$

y al ser el vector unitario, $\vec{u_e}$, para el eje OZ, precisamente, el vector unitario $\vec{k}$, tendremos

$$M_e = \vec{u_e} \cdot \vec{M_o} = \vec{k} \cdot (4\vec{i} - 12\vec{j} - 12\vec{k})$$

por tanto,

$$M_e = -12$$

15. Dado el vector $\vec{A} = (3t^2 - 2t)\,\vec{i} + 6t\,\vec{j} - 7t^3\,\vec{k}$, determinar el valor de $\dfrac{d^2\vec{A}}{dt^2}$ para $t = 2$.

Resolución

$$\text{Al ser } \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)$$

calculamos en primer lugar la expresión correspondiente a $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\,(3t^2 - 2t)}{dt}\,\vec{i} + \frac{d\,6t}{dt}\,\vec{j} + \frac{d\,7t^3}{dt}\,\vec{k} =$$

$$= (6t - 2)\,\vec{i} + 6\,\vec{j} - 21t^2\,\vec{k}$$

y ahora

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = \frac{d\,[(6t - 2)\,\vec{i} + 6\vec{j} - 21t^2\vec{k}]}{dt} = 6\vec{i} - 42t\vec{k}$$

es decir,

$$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = 6\vec{i} - 84\vec{k}$$

16. Dados los vectores

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{C} = \vec{i} - 2\vec{k}$$

$$\vec{D} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$$

aplicados en el punto (2,2,2), determinar el momento $\vec{M}_o$, del conjunto de vectores con respecto al punto (3,2,1).

Resolución

Aplicaremos el teorema de Varignon, y para ello, en primer lugar, calcularemos la resultante del sistema de vectores.

$$\vec{S} = (3 + 2 + 1 + 4)\,\vec{i} + (3 - 2 + 2)\,\vec{j} + (3 + 1 - 2)\,\vec{k} =$$

$$= 10\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

El momento resultante será

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{S}$$

y $\vec{r}$ tiene como componentes

$$r_x = (2 - 3) = -1$$

$$r_y = (2 - 2) = 0$$

$$r_z = (2 - 1) = 1$$

de manera que

$$\vec{r} = -\vec{i} + \vec{k}$$

por tanto,

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 10 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 10 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 10 & -3 \end{vmatrix}$$

es decir,

$$\vec{M}_o = 3\vec{i} + 12\vec{j} + 3\vec{k}$$

17. Hallar el gradiente del escalar $V = x^2 y + 2xz - z^2$.

Resolución

El vector gradiente será

$$\overrightarrow{\textbf{grad V}} = \overrightarrow{\ } V = \frac{\delta V}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta V}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta V}{\delta z}\vec{k}$$

en donde

$$\frac{\delta V}{\delta x} = 2xy + 2z$$

$$\frac{\delta V}{\delta y} = x^2$$

$$\frac{\delta V}{\delta z} = 2x - 2z$$

por tanto,

$$\overrightarrow{\mathbf{grad\ V}} = (2xy + 2z)\,\vec{i} + x^2\vec{j} + (2x - 2z)\,\vec{k}$$

18. Dados los vectores

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{B} = 5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{C} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$$

demostrar que forman un triángulo rectángulo.

Resolución

Para efectuar la demostración solicitada, habremos de comprobar que uno de los vectores es suma de los otros dos y que dos de los tres vectores son perpendiculares entre sí.

Comparando los vectores, concluimos rápidamente que

$$\vec{A} + \vec{C} = \vec{B}$$

pues

$$A_x + C_x = B_x \,;\, A_y + C_y = B_y \,;\, A_z + C_z = B_z$$

con lo que vemos que se cumple la primera de las condiciones indicadas, y, por tanto, los tres vectores determinan un triángulo.

Para comprobar la perpendicularidad entre dos de los vectores, lo más cómodo es analizar los correspondientes productos escalares, pues cuando dos vectores son perpendiculares entre sí, su producto escalar es nulo:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (15 + 2 - 3) = 14$$

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = (10 + 1 - 12) = 21$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = (6 - 4 - 2) = 0$$

con lo que vemos que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{C}$ son perpendiculares, y en consecuencia, completamos la segunda condición planteada. Por tanto, los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ forman un triángulo rectángulo en el que el vector $\vec{B}$ constituye la hipotenusa.

19. Hallar la divergencia en el punto (3,2,1) del vector

$$\vec{A} = 3x^2y\,\vec{i} - 2x\,\vec{j} + z^2x\,\vec{k}$$

Resolución

Hallaremos, en primer lugar, la forma general que presentará el escalar Div $\vec{A}$.

$$\vec{\ } \cdot \vec{A} = \left(\frac{\delta}{\delta x}\vec{i} + \frac{\delta}{\delta y}\vec{j} + \frac{\delta}{\delta z}\vec{k}\right)(3x^2y\vec{i} - 2x\vec{j} + z^2x\vec{k}) =$$

$$= \frac{\delta\,(3x^2y)}{\delta x} + \frac{\delta\,(-2x)}{\delta y} + \frac{\delta\,(z^2x)}{\delta z} = 6\,xy + 2xz$$

y al sustituir los valores correspondientes al punto indicado tendremos

$$\textbf{Div}\ \vec{A} = \mathbf{42}$$

20. Determinar el rotacional en el punto (2, −1,1) del vector

$$\vec{A} = x^2y\,\vec{i} - 2xyz\,\vec{j} + x^2\,y\,\vec{k}$$

Resolución

Hallaremos en primer lugar la forma general que presentará el vector $\overrightarrow{\textbf{rot A}}$.

$$\overrightarrow{\textbf{rot A}} = \overrightarrow{\ } \cdot \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ x^2y & -2xyz & x^2y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} \dfrac{\delta}{\delta y} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ -2xyz & x^2y \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta z} \\ x^2y & x^2y \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} \dfrac{\delta}{\delta x} & \dfrac{\delta}{\delta y} \\ x^2y & -2xyz \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(x^2 + 2xy) - \vec{j}\,(2xy) + \vec{k}\,(-2yz - x^2)$$

y en el punto propuesto (sustituyendo valores),

$$\overrightarrow{\textbf{rot A}} = 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

Ejercicios propuestos

1. Determinar el módulo del vector $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Solución

$$|\vec{A}| = \sqrt{14}$$

2. Dados los vectores

$$\vec{A} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} + \vec{k}$$

$$\vec{C} = -\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

determinar el vector suma.

Solución

$$\vec{S} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

3. Dado el vector $\vec{A} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, determinar el vector $2\vec{A}$.

Solución

$$2\vec{A} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

4. Dados los vectores

$$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\vec{B} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

determinar el vector $3\vec{A} - 2\vec{B}$.

Solución

$$3\vec{A} - 2\vec{B} = 7\vec{j} - 2\vec{k}$$

5. Dado el vector $\vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, determinar el vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{A}$.

Solución

$$\vec{u_A} = \frac{4}{\sqrt{24}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{24}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{24}}\vec{k}$$

6. Determinar cuál es el vector que, siendo perpendicular al vector $\vec{A} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$, tenga de módulo $\sqrt{50}$ si su componente según el eje OZ tiene de módulo 5.

Solución

La solución no es única, sino que hay cuatro soluciones válidas para el enunciado del ejercicio.

$$\vec{B_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{B_2} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\vec{B_3} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{B_4} = -3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$$

7. Determinar los cosenos directores del vector $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$.

Solución

$$\cos\alpha = 0{,}6\ ;\ \cos\beta = 0\ ;\ \cos\gamma = 0{,}8$$

8. Determinar la expresión analítica correspondiente al vector $\vec{A}$ que tiene su origen en el punto (3,2,4) y su extremo en el punto (4,3,6).

Solución

$$\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

9. Dados los vectores

$$\vec{A} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$$

determinar $\vec{A} \times \vec{B}$ y $\vec{B} \times \vec{A}$.

Solución

$$\vec{A} \times \vec{B} = 3\vec{i} - 13\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{B} \times \vec{A} = -3\vec{i} + 13\vec{j} + 2\vec{k}$$

10. Dado el vector $\vec{A} = 3t^2\vec{i} - 6t\vec{j} + (4t^3 + 2)\,\vec{k}$, determinar el valor de $\dfrac{d\vec{A}}{dt}$.

Solución

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 6t\vec{i} - 6\vec{j} + 12t^2\vec{k}$$

11. Dado el vector $\vec{A} = 2t\,\vec{i} + 3t^2\,\vec{j} - 3\,\vec{k}$, calcular el valor de la derivada del módulo de $\vec{A}$, y el módulo de la derivada de $\vec{A}$ para $t = 2$.

Solución

$$\left[\frac{d\vec{A}}{dt}\right] = \sqrt{148} \qquad \frac{d|\vec{A}|}{dt} = \frac{152}{13}$$

12. Calcular la integral

$$\vec{I} = \int [(3t^2 + 2t)\,\vec{i} + 3t^2\,\vec{j} + 4\vec{k}]\,dt$$

Solución

$$\vec{I} = (t^3 + t^2)\,\vec{i} + t^3\vec{j} + 4t\vec{k} + \vec{C}$$

13. Determinar el valor de la integral

$$\vec{I} = \int_0^2 [t\vec{i} + (2t^2 + 1)\,\vec{j} - 3\vec{k}]\,dt$$

Solución

$$\vec{I} = 2\,\vec{i} + \frac{22}{3}\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

14. ¿Qué valor ha de tener el parámetro n para que el vector $\vec{A} = 3\vec{i} + n\vec{j} + 3\vec{k}$ forme un ángulo de 60° con el eje OZ?

Solución

$$n = \pm\sqrt{18}$$

15. Sean los vectores

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + n\vec{k}$$

Determinar el valor que debe adoptar n para que el vector $\vec{A} - 3\vec{B}$ se encuentre en el plano XY.

Solución

$$n = 1$$

16. El vector $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ tiene su origen en el punto (4,2,1). Determinar su momento con respecto al punto (2,2,1).

Solución

$$\vec{M}_o = -6\vec{j} - 2\vec{k}$$

17. En el punto (3,2,1) se encuentran aplicados los vectores

$$\vec{A} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{C} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Determinar el momento del conjunto de vectores con respecto al punto (6,0,0).

Solución

$$\vec{M}_o = -\vec{i} + 10\vec{j} - 23\vec{k}$$

18. Determinar el gradiente del escalar

$$V = 3x^2 - 2xy + xz^3$$

Solución

$$\overrightarrow{\text{grad } V} = (6x - 2y + z^3)\,\vec{i} - 2x\vec{j} + 3xz^2\vec{k}$$

19. Hallar la divergencia en el punto (1,0, −1) del vector

$$\vec{A} = 2xz\vec{i} + 3x^2\vec{j} - 2xz\vec{k}$$

Solución

$$\text{Div } \vec{A}_{(1,0,-1)} = -4$$

20. Hallar el rotacional en el punto (1,0, −1) del vector

$$\vec{A} = 2xz\vec{i} + 3x^2\vec{j} - 2xz\vec{k}$$

Solución

$$\overrightarrow{\text{rot } A} = 6\vec{k}$$

Esta colección tiene como objetivo presentar material que, a la vez que valioso pedagógicamer sirva de excelente guía práctica para preparar temas de COU y Selectividad, tanto en el aspe de conocimientos como en lo referente a ejercic prácticos. Por ello, la colección está concebida forma de cuadernos, para que cada profesor o alu no trabaje aquellos temas que considere más a cuados a sus intereses.

Cada cuaderno ofrece la siguiente estructura:

- *Recordatorio de puntos fundamentales.*
- *Cuestiones de autoevaluación.*
- *Ejercicios resueltos.*
- *Ejercicios propuestos, con su solución.*

Cuadernos de COU y
Selectividad

FISICA

ÍNDICE DE TÍTULOS

ISBN 84-205-2122-1

9 788420 521220 00000

Alhambra Longman